Question 1 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

- ☒ $]-\infty, 0[$
- ☐ $[-1, +\infty[$
- ☐ $]-\infty, -1[$
- ☐ $]-\infty, 0]$

2024-2025

#2025-2026, #Analyse i

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n)}$

BA $= e^0 = 1$

Comparaison corollaire | Critère exos $f(0)=f'(0)=0$ | d'Alembert | Cauchy/Lemp | Alt.

0% | 0% | $\sim 60\%$ | $\sim 5\%$ | 0%

$\frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}} \leq e^{\lambda n}$

info si $\sum e^{\lambda n}$ converge.

pas d'info si $\sum e^{\lambda n}$ diverge $\leftarrow$ Pas idéal

pas sûr que le nouveau problème soit plus facile

$\sum f(\frac{1}{n})$

$f \in C^2$

$f(0) = f'(0) = 0$

Non

$\frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}} \geq 0$ $\forall n.$

Question 1 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

- [x] $]-\infty, 0[$
- [ ] $[-1, +\infty[$
- [ ] $]-\infty, -1[$
- [ ] $]-\infty, 0]$

d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{e^{\lambda(n+1)}}{(n+1)^{1+\lambda}}}{\dfrac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\lambda(n+1)}}{e^{\lambda n}} \, \frac{n^{1+\lambda}}{(n+1)^{1+\lambda}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\lambda(n+1)-\lambda n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\lambda} = e^{\lambda} \cdot 1 = e^{\lambda}$$

$$e^{\lambda} < 1 \iff \lambda < \log(1) = 0 \Rightarrow \forall \lambda \in]-\infty, 0[$$

série converge absolument.

$\forall \lambda \in]0,+\infty[$, la série diverge $\quad (e^{\lambda} > 1)$

$\boxed{\lambda = 0}$???

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{0 \cdot n}}{n^{1+0}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$ diverge

série converge ssi $\lambda \in]-\infty, 0[$

2024-2025

Question 22 : Si la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-1)^k$ converge pour $x = 0$, alors elle converge pour $x = 2$.

☐ VRAI ☒ FAUX

$x = 0 \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$

cvce abs VS conv

$x = 2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$a_k \downarrow 0 \qquad a_k = \frac{1}{k}, \; a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\sum_1 a_k (x-1)^k \leadsto$ Int conv.

$]x_0 - r, x_0 + r[$

$[x_0 - r, x_0 + r[$

$]x_0 - r, x_0 + r]$

$0 \in I \Rightarrow 2 \in I$

$I = \{x_0\}, \mathbb{R}, [x_0 - r, x_0 + r]$

$I = [0, 2[$

2024-2025

Question 2 : Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right))}.$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

- ☐ $z = 2(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)) = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$
- ☒ $z = 2(\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right))$
- ☐ $z = \sqrt[3]{4}(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)) = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{13\pi}{12}}$
- ☐ $z = \sqrt[3]{4}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right))$

$z = a+ib$?

$\sim 20\%$

$z = re^{i\theta}$?

80%

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+ib} = \frac{(a+ib)^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))}$$

$$\frac{r}{re^{i\theta}} = \frac{r^2e^{i2\theta}}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))}$$

$$4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))r^2e^{i3\theta} = r^2e^{i3\theta}$$

$$4e^{i\pi/3} = r^2e^{i3\theta}$$

$$4e^{i\pi/3} = r^2 e^{i3\theta} \xrightarrow{\text{module}} 4 = r^2 \longrightarrow r = 2$$

$$\xrightarrow{\text{arg}} \pi/3 = 3\theta + 2k\pi$$

$$e^{i\pi/3} = e^{i3\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 3\theta$$

on cherche les 3 racines complexes de $e^{i\pi/3}$

$$\theta = \underset{k=0}{\frac{\pi}{9}} \quad \text{ou} \quad \underset{k=1}{\frac{\pi + 6\pi}{9}} \quad \text{ou} \quad \underset{k=2}{\frac{\pi + 12\pi}{9}} \quad \text{ou} \quad \cancel{\underset{k=3}{\frac{\pi + 18\pi}{9}}}$$

$$\frac{\pi}{9} \qquad \frac{7\pi}{9} \qquad \frac{13\pi}{9} \qquad \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

Question 23 : Soient f et g deux fonctions possédant des développements limités d'ordre 1 autour de $x_0 = 0$, donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + o(|x|) \ ,$$
$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + o(|x|) \ .$$

Alors le développement limité d'ordre 1 de $f(g(x))$ autour de $x_0 = 0$ est donné par

$$f(g(x)) = 3 + x + o(|x|) \ .$$

☐ VRAI ☒ FAUX

2024-2025

Composition de DLs !!

De quoi a-t-on besoin pour calculer le DL de $f(g(x))$ autour de $x_0 = 0$

DL de f autour de $g(0) = 1$

DL de g autour de 0.

J'ai pas ce dont j'ai besoin

$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

$f(x) = 2e^{x} - 1$

$g(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}$

$f(g(x)) = 2e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{x}} - 1$

$f(g(0)) = 2e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{0}} - 1 = 2e - 1$

Question 17 : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

2022 - 2023

- ☐ la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☐ la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument

2022-2023

Question 25 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'ensemble image est $[0,1]$. Alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) - x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

limites?

$h(a) \cdot h(b) \leq 0$

$0 \leq f(x) \leq 1$

soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. TVI

$\forall x < y \in [a,b]$ et c entre $h(x)$ et $h(y)$,

$\exists z \in [x,y]$ tq $\boxed{h(z) = c}$

$h(x) =? \; f(x) - x$ ✓

$c =? \; 0$ ✓

$x =? \; 0$

$y =? \; 1$

$\Rightarrow$ TVI $\exists z$ entre 0 et 1 tq $f(x) - x = 0$

0 est-il entre $h(0) = f(0) \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 \leq 0$

$\mathrm{Im}(f) = [0,1]$, $\Rightarrow \exists x_0$ tq $f(x_0) = 0$ et

$\in [0,1]$

$\exists y_0$ tq $f(y_0) = 1$ $[0,1]$

$\in [0,1]$

$h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 - x_0 \leq 0$

$h(y_0) = f(y_0) - y_0 = 1 - y_0 \geq 0$

TVI $\Rightarrow \exists z$ entre 0 et 1 ou entre x_0 et y_0 tq

$h(z) = 0$

2022-2023

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

lien continuité f

$\Updownarrow$ $\Uparrow$

dérivabilité g

$f(x) = |x|$

$$g(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

dérivable en 0

$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) \cdot x$

$$g(x) = x^2 \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dérivable en 0

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot f(h) - 0 \cdot f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(h) = f(0)$$

CONCLUSION

Ce que j'aimerais que vous reteniez du cours pour

- Les examens : tout
- La suite des études : développements limités
- La suite de la vie : Le langage courant n'est pas univoque.